ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 132 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440

УДК 517.95

Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем

Владимир Иосифович СУМИН

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Volterra funktional equations in the stability problem for the existence of global solutions of distributed controlled systems

Vladimir I. SUMIN

Nizhny Novgorod State University
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Аннотация. Ранее автором была предложена довольно общая форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \equiv \{t^1, \ldots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \quad z \in L_p^m \equiv \left(L_p\left(\Pi\right)\right)^m,$$

где $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ — управление; $A : L_p^m \to L_q^l$ — линейный *оператор, вольтерров на некоторой системе* T *подмножеств* Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A\left[z\right]\big|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi\setminus H}$; $p,q,k \in [1,+\infty]$. Это определение вольтерровости — многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра. К подобным уравнениям естественным образом (обращением главной части) приводятся разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с разного рода запаздываниями и др.). Переход к эквивалентному ВФУ-описанию УНКЗ адекватен многим проблемам распределенной оптимизации. В частности, автором была предложена опирающаяся на это описание схема получения конструктивных достаточных условий *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) УНКЗ. Схема использует продолжение локальных решений ВФУ (то есть решений на множествах $H \in T$) вдоль упорядоченной по вложению конечной цепочки множеств $\{H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_{\mathbf{k}-1} \subset H_{\mathbf{k}} \equiv \Pi\}$ системы T. При этом используется опирающаяся на принцип сжимающих отображений специальная теорема существования локальных решений. В случае $p = q = k = \infty$ при естественных предположениях возможность применения этого принципа обеспечивается тем, что оператор правой части $F_v[z\,(.)]\,(t) \equiv f\left(t, A[z](t), v(t)\right)$ удовлетворяет операторному условию Липшица с квазинильпотентным «оператором Липшица». Это позволяет, пользуясь хорошо известными результатами функционального анализа, ввести в пространстве $L_\infty^m(H)$ такую эквивалентную обычной норму, в которой оператор правой части будет сжимающим. В общем случае $1 \leq p, q, k \leq \infty$, охватывающем существенно более широкий круг УНКЗ, оператор правой части подобному операторному условию Липшица, вообще говоря, не удовлетворяет. В этом случае введение требуемой для применения принципа сжимающих отображений эквивалентной нормы пространства $L_p^m(H)$ обеспечивает доказанная ранее автором *теорема об эквивалентной норме*, опирающаяся на введенное им понятие *суперравностепенной квазинильпотентности* семейства линейных операторов, действующих в банаховом пространстве. В данной статье показано, как эта теорема может быть применена для получения достаточных условий УСГР ВФУ в указанном случае.

Ключевые слова: вольтеррово функциональное уравнение; распределенная управляемая система; устойчивость существования глобальных решений; суперравностепенно квазинильпотентное семейство операторов; теорема об эквивалентной норме

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199_а).

Для цитирования: *Сумин В.И.* Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 422–440.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440.

Abstract. Earlier the author proposed a rather general form of describing *controlled initial–boundary value problems* (CIBVPs) by means of *Volterra functional equations* (VFE)

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \equiv \{t^1, \ldots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \quad z \in L_p^m \equiv \left(L_p\left(\Pi\right)\right)^m,$$

where $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ — control function; $A : L_p^m\left(\Pi\right) \to L_q^l\left(\Pi\right)$ — linear operator; the operator A is a *Volterra operator for some system* T of subsets of the set Π in the following sense: for any $H \in T$, the restriction $A\left[z\right]|_H$ does not depend on the values of $z|_{\Pi \setminus H}$ (this definition of the Volterra operator is a direct multidimensional generalization of the well-known Tikhonov definition of a functional Volterra type operator). Various CIBVP (for nonlinear hyperbolic and parabolic equations, integro-differential equations, equations with delay, etc.) are reduced by the method of conversion the main part to such functional equations. The transition to equivalent VFE-description of CIBVP is adequate to many problems of distributed optimization. In particular, the author proposed (using such description) a scheme for obtaining sufficient stability conditions (under perturbations of control) of the existence of global solutions for CIBVP. The scheme uses continuation local solutions of functional equation (that is, solutions on the sets $H \in T$). This continuation is realized with the help of the chain $\{H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_{\mathbf{k}-1} \subset H_{\mathbf{k}} \equiv \Pi\}$, where $H_i \in T, i = \overline{1, \mathbf{k}}$. A special local existence theorem is applied. This theorem is based on the principle of contraction mappings. In the case $p = q = k = \infty$ under natural assumptions, the possibility of applying this principle is provided by the following: the right-hand side operator $F_v[z\left(.\right)]\left(t\right) \equiv f\left(t, A[z](t), v(t)\right)$ satisfies the Lipschitz condition in the operator form with the quasi-nilpotent «Lipschitz operator». This allows (using well-known results of functional analysis) to introduce in the space $L_\infty^m(H)$ such an equivalent norm in which the operator of the right-hand side will be contractive. In the general case $1 \leq p, q, k \leq \infty$ (this case covers a much wider class of CIBVP), the operator F_v, as a rule, does not satisfy such Lipschitz condition. From the results obtained by the author earlier, it follows that in this case there also exists an equivalent norm of the space $L_p^m(H)$, for which the operator F_v is a contraction operator. The corresponding basic theorem (*equivalent norm theorem*) is based on the notion of *equipotential quasi-nilpotency* of a family of linear operators, acting in a Banach space. This article shows how this theorem can be applied to obtain sufficient stability conditions (under perturbations of control) of the existence of global solutions of VFE.

Keywords: functional Volterra equation; controlled distributed system; stability of the existence of global solutions; equipotential quasinilpotent family of the operators; equivalent norm theorem

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00199_a).

For citation: Sumin V.I. Vol'terrovy funktsional'nyye uravneniya v probleme ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy raspredelennykh upravlyayemykh sistem [Volterra functional equations in the stability problem for the existence of global solutions of distributed controlled systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 422–440. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В [1] была предложена довольно общая форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ)

$$z(t) = f\left(t,\ A[z](t),\ v(t)\right), \quad t \equiv \{t^1, ..., t^n\} \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m(\Pi) \equiv (L_p(\Pi))^m, \tag{0.1}$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ ограничено и измеримо по Лебегу, $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — функция типа Каратеодори; $v(.)$ — управление из некоторого $\mathcal{D} \subset L_k^s$; $A : L_p^m \to L_q^l$ — *линейный ограниченный оператор* (ЛОО), вольтерров на некоторой системе T измеримых подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$; $p, q, k \in [1, +\infty]$. Это определение вольтерровости — многомерное обобщение хорошо известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра. К подобным уравнениям естественным образом (обращением главной части) приводятся разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с разного рода запаздываниями и др.). Способ обращения главной части УНКЗ в достаточно общем виде описан в [2, §2]; многочисленные и разнообразные конкретные примеры применения способа см., в частности, в [3,4], [5, гл.2], [6,7] (краткие обзоры см. в [6,8–11]). Переход к эквивалентному ВФУ-описанию УНКЗ вида (0.1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации, позволяя, возможно, достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности теоретических построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием иметь удобные для приложений формулировки — с другой (см. обзоры в [6,8–11]).

В частности, автором была предложена опирающаяся на это описание схема получения конструктивных достаточных условий *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) УНКЗ. Заметим, что понятие локального решения (0.1) как решения этого уравнения на некотором множестве H системы T — естественное следствие вольтерровости оператора A в указанном выше смысле; для каждого множества $H \in T$ «естественным образом» определяется действие оператора A на функции $y \in L_p^m(H)$ (и следовательно, как оператора из $L_p^m(H)$ в $L_q^l(H)$) формулой $A[\tilde{y}](t), t \in H$, где $\tilde{y}$ — любое принадлежащее L_p^m продолжение функции y с множества H на Π; ниже мы систематически пользуемся этим замечанием. Указанная схема использует продолжение локальных решений ВФУ вдоль некоторой цепочки множеств системы T (*цепочкой множеств* называем конечную систему множеств $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots,\ H_{\mathbf{k}}\}$, линейно упорядоченную по вложению $(H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{\mathbf{k}})$ и такую, что $H_0 = \emptyset, H_{\mathbf{k}} = \Pi$; мы без ограничения общности считаем, что $\emptyset \in T$, $\Pi \in T$). При этом используется опирающаяся на принцип сжимающих отображений специальная теорема существования локальных решений. В случае $p = q = k = \infty$ при естественных предположениях возможность применения этого принципа обеспечивается тем, что оператор правой части

$$F_v[z(.)](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t))$$

удовлетворяет операторному условию Липшица с квазинильпотентным «оператором Липшица». Это позволяет, пользуясь хорошо известными результатами функционального анализа, ввести в пространстве $L_\infty^m(H)$ такую эквивалентную обычной норму, в которой оператор правой части будет сжимающим (см., например, конкретные реализации в [3,4], [5, гл.2], краткие обзоры в [6,8,9,11]). В общем случае $1 \le p, q, k \le \infty$, охватывающем существенно более широкий круг УНКЗ, оператор правой части (0.1) подобному операторному условию Липшица, вообще говоря, не удовлетворяет (это хорошо видно на примере рассматриваемой в [7] нелинейной управляемой системы Гурса-Дарбу). В этом случае введение требуемой для применения принципа сжимающих отображений эквивалентной нормы пространства $L_p^m(H)$ обеспечивает доказанная в [11] *теорема об эквивалентной норме*, опирающаяся на введенное в [12, 13] понятие *суперравностепенной квазинильпотентности* семейства линейных операторов, действующих в банаховом пространстве. Сформулируем эту теорему. Пусть $\mathbf{B}$ — вещественное банахово пространство с нормой $\|.\|$, $\mathbf{\Gamma}$ — некоторое множество, $\{G(\gamma)[.] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ — семейство зависящих от параметра $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ квазинильпотентных ЛОО. Достаточно естественно назвать семейство $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sqrt[k]{\sup_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|} \to 0$ при $k \to \infty$ [12, 13]. Но нам требуется следующее определение [12, 13]: семейство $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ *суперравностепенно квазинильпотентно*, если

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\mathbf{\Gamma}} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{0.2}$$

З а м е ч а н и е 0.1. Число, равное $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sup\limits_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\mathbf{\Gamma}} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|}$, называется *совместным спектральным радиусом* (joint spectral radius) семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ [14]. Если совместный спектральный радиус семейства операторов равен нулю, то такое семейство часто называют *квазинильпотентным* (см., например, [15]). Мы для обозначения свойства (0.2) семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ используем название *суперравностепенная квазинильпотентность*, придерживаясь терминологии, предложенной в [12, 13].

Теорема 0.1 (теорема об эквивалентной норме [11–13])**.** *Пусть норма* $\|.\|$ *пространства* $\mathbf{B}$ *монотонна относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по некоторому конусу* K. *Пусть семейство* $\{G(\gamma)[.] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ *квазинильпотентных* ЛОО, *для каждого из которых конус* K *является инвариантным, равномерно ограничено, то есть*

$$\nu_G \equiv \sup_{\gamma\in\Gamma} \|G(\gamma)\| < \infty,$$

и суперравностепенно квазинильпотентно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует эквивалентная норме* $\|.\|$ *норма* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *пространства* $\mathbf{B}$, *монотонная относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по конусу* K *такая, что для каждого* $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ *соответствующая норма оператора* $G(\gamma)$ *не превосходит числа* ε (*множество* $\mathrm{K} \subset \mathbf{B}$ *называем конусом, если оно замкнуто, любая неотрицательная комбинация элементов* K *лежит в* K, *никакой ненулевой вектор не принадлежит* K *вместе со своим обратным*).

Цель данной статьи — показать, как теорема 0.1 позволяет получить условия УСГР ВФУ (0.1) при конечных p, q, k в важном для приложений случае регулярного оператора A. Основные ее утверждения были в несколько иной форме депонированы в [13] и без доказательств анонсированы в [12], их доказательства не публиковались.

Примем следующие соглашения: считаем упомянутые выше множества Π, $\mathcal{D}$, функцию f, оператор A, систему T, числа $p, q \in [1, +\infty)\,(\,q \geq p\,)$, $k \in [1, +\infty]$, $m, l, s, n \in \mathbb{N}$ фиксированными; $r = pq/(q-p)$ при $p < q$, $r = +\infty$ при $p = q$; модуль вектора (матрицы) равен сумме модулей его (соотв. ее) компонент; норма в $L_p^m(H)$ задается формулой $\|z\|_{p,m,H} \equiv \|\,|z|\,\|_{p,H}$, где $\|\cdot\|_{p,H}$ — стандартная норма $L_p(H)$ (при $H = \Pi$ и/или $m = 1$ соответствующие значки в обозначениях, как правило, опускаем); $L_r^{m\times l}(H)$ — пространство $(m \times l)$-матриц-функций с $L_r(H)$-компонентами, $\|\cdot\|_{r,m\times l,H} \equiv \|\,|\cdot|\,\|_{r,H}$ — норма в $L_r^{m\times l}(H)$; $V(T)$ — семейство всех операторов (как линейных, так и нелинейных), действующих из одного в другое пространство вектор-функций на Π и вольтерровых на системе T в указанном выше смысле; для любых $H \in T$, $M \in \mathbf{R}_+$, $\hat{z} \in L_p^m(H)$ положим

$$UA_{M,H}(\hat{z}) \equiv \big\{z \in L_p^m(H) :\, \|A[z - \hat{z}]\|_{q,l,H} \leq M\big\};$$
$$T^{(-)} \equiv \big\{h :\, h = H_1 \setminus H_2 :\, H_1, H_2 \in T,\, H_2 \subset H_1\big\};$$

P_H — оператор умножения на характеристическую функцию множества $H \subset \Pi$; S_H — оператор сужения на множество $H \subset \Pi$ функции, определенной на Π, $S_H[y](t) \equiv y(t)$, $t \in H$; Q_H — оператор продолжения нулем на множество Π функции, определенной на $H \subset \Pi$, $Q_H[y](t) \equiv \big\{y(t),\, t \in H;\, 0, t \in \Pi \setminus H\big\}$; для функции y, определенной на Π, пишем $Q_H[y]$ вместо $Q_H S_H[y]$; $L(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — класс всех ЛОО, определенных на банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$ и действующих в банахово пространство $\mathbf{B}_2$; $\|G\|_{p,m,H\to q,l,H}$ — норма ЛОО $G \in L(L_p^m(H), L_q^l(H))$; $\Sigma \equiv \Sigma_\Pi$ — σ-алгебра измеримых подмножеств Π.

1. Основные формулировки

Требования к уравнению (0.1) формулируем в виде выписываемых ниже условий $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{K}_1$), $\mathbf{K}_2$), $\mathbf{K}_3$), **a**), **b**), **c**), **d**), **e**), **f**).

$\mathbf{K}_0$) Функция $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})$ дифференцируема по $\mathbf{p}$ на $\mathbf{R}^l$ для каждого $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^s$ при *почти всех* (п.в.) $t \in \Pi$, вместе с производной $f'_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})$ измерима по t на Π для любой пары $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s$ и непрерывна по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ при п.в. $t \in \Pi$.

$\mathbf{K}_1$) Формула $\mathbf{f}[y, v](t) \equiv f\,(t,\, y(t),\, v(t))\,,$ $t \in \Pi$, $y \in L_q^l$, $v \in \mathcal{D} \subset L_k^s$, определяет оператор $\mathbf{f}[.,.] : L_q^l \times \mathcal{D} \to L_p^m$.

$\mathbf{K}_2$) Формула $\mathbf{f}_1[y, v](t) \equiv f'_{\mathbf{p}}\,(t,\, y(t),\, v(t))\,,$ $t \in \Pi$, $y \in L_q^l$, $v \in \mathcal{D} \subset L_k^s$, определяет ограниченный оператор $\mathbf{f}_1[.,.] : L_q^l \times \mathcal{D} \to L_r^{m\times l}$. То есть существует неубывающая функция $\mathcal{N}(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что $\big\|\mathbf{f}_1[y, v](.)\big\|_{r,m\times l} \leq \mathcal{N}\big(\max\big\{\|y\|_{q,l},\, \|v\|_{k,s}\big\}\big)$ при $y \in L_q^l$, $v \in \mathcal{D}$.

a) Существует ЛОО $B : L_p \to L_q$ такой, что $|A[z](t)| \leq B\,[|z|]\,(t)$, $t \in \Pi$, $z \in L_p^m$.

Далее мажоранту B считаем фиксированной и удовлетворяющей условию

b) $B \in V(T)$ (а следовательно и $A \in V(T)$).

В силу $\mathbf{K}_1$) формула

$$F[z, v](t) \equiv f\,(t, A[z](t), v(t))\,,\; t \in \Pi,\; z \in L_p^m,\; v \in \mathcal{D},$$

определяет оператор $F[.,.]: L_p^m \times \mathcal{D} \to L_p^m$. Положим

$$I(t,x,y,\mathbf{v}) \equiv \int_0^1 f'_{\mathbf{p}}(t,\, x+\theta y,\, \mathbf{v})\, d\theta, \;\; t \in \Pi, \;\; x \in \mathbf{R}^l, \;\; y \in \mathbf{R}^l, \;\; \mathbf{v} \in \mathbf{R}^s.$$

В силу $\mathbf{K}_2)$ формула

$$J[x,y,v](t) \equiv I\big(t,\, A[y](t),\, A[x-y](t),\, v(t)\big), \;\; t \in \Pi, \;\; x,y \in L_p^m, \;\; v \in \mathcal{D},$$

задает ограниченный оператор $J[.,.,.]: L_p^m \times L_p^m \times \mathcal{D} \to L_r^{m\times l}$ и, каковы бы ни были $x \in L_p^m$, $y \in L_p^m$, $v \in \mathcal{D}$, формула

$$G(x,y,v)[z](t) \equiv |\; J[x,y,v](t) \;| \cdot B[z](t), \;\; t \in \Pi, \;\; z \in L_p,$$

задает ЛОО $G(x,y,v)[.]: L_p \to L_p$. Так как $F, J, G \in V(T)$ ввиду $\mathbf{b}$), то в силу $\mathbf{K}_2)$

$$\begin{gathered} \||J[x,y,v](.)|\|_{r,H} \le \mathcal{N}(\max\{\|A[y]\|_{q,l,H} + \|A[x-y]\|_{q,l,H}, \|v\|_{k,s,H}\}), \\ t \in H, \;\; x,y \in L_p^m(H), \;\; v \in L_k^s(H), \;\; H \in T. \end{gathered} \tag{1.1}$$

По теореме о конечных приращениях для любых $H \in T$, $x,y \in L_p^m(H)$, $v \in L_k^s(H)$

$$F[x,v](t) - F[y,v](t) = \{J[x,y,v](t)\} \cdot A[x-y](t), \quad t \in H. \tag{1.2}$$

Пусть в $L_r = L_r(\Pi)$ выделен некоторый класс функций $\Gamma \equiv \Gamma(\Pi)$ такой, что для любого $h \in T^{(-)}$, $mes\; h > 0$, справедливо следующее: $P_h\Gamma \subset \Gamma$; формальная замена в определении класса $\Gamma(\Pi)$ множества Π на множество h корректна и приводит к некоторому классу заданных на h функций, который мы обозначим $\Gamma(h)$; элементами класса $\Gamma(h)$ являются те и только те определенные на h функции, каждая из которых есть сужение на h некоторой функции класса $\Gamma(\Pi)$ (в приложениях роль Γ может играть, например, весь класс L_r, некоторый класс L_ν, $\nu > r$, класс функций, пересечение которого с каждым шаром из L_r есть множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными L_r-нормами и др.).

$\mathbf{K}_3)$ $|J\,[x,y,v]\,(.)| \in \Gamma\,(\Pi)$ для любых $x,y \in L_p^m$ и $v \in \mathcal{D}$.

c) Семейство операторов

$$W\,(B,\Pi,\nu) \equiv \big\{(\alpha B) \in L(L_p,L_p):\; \alpha \in \Gamma(\Pi),\; \|\alpha\|_r \le \nu\big\}$$

суперравностепенно квазинильпотентно при любом $\nu > 0$.

Приведем некоторые следствия сформулированных условий.

Лемма 1.1. *Если* $\Gamma\,(\Pi) = L_\nu\,(\Pi)$, $r \le \nu < \infty$, *то* $\mathbf{K}_3)$ *есть следствие условия: для любых* $y \in L_p^m$ *и* $v \in \mathcal{D}$ *функция* $|\mathbf{f}_1\,[A\,[y]\,,v]\,(.)|$ *принадлежит* $\Gamma\,(\Pi)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $|J\,[x,y,v]\,(t)|$, $t \in \Pi$, мажорируется интегралом Бохнера по отрезку $[0,1]$ от непрерывной функции со значениями в $\Gamma(\Pi)$. □

При выполнении условия **c**), для любой $\alpha \in \Gamma\,(\Pi)$ существуют операторы

$$R(\alpha B) \equiv (I-\alpha B)^{-1} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha B)^i \in L(L_p,L_p) \;\; \text{и} \;\; R(B\alpha) \equiv (I-B\alpha)^{-1} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (B\alpha)^i \in L(L_q,L_q).$$

Получаем $R(B\alpha) \equiv I + B \cdot R(\alpha B)\alpha$ и следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Ввиду условия* **c**) *справедливы оценки*

$$\|R(\alpha B)\|_{p\to p} \le \Phi_1(\nu) \equiv 2\biggl(1+\sum_{i=1}^{N(\nu)}(\nu\|B\|)^i\biggr), \quad \alpha\in\Gamma, \quad \|\alpha\|_r\le\nu, \tag{1.3}$$

$$\|R(B\alpha)\|_{q\to q} \le \Phi_2(\nu) \equiv 1+\|B\|\cdot\nu\cdot\Phi_1(\nu), \quad \alpha\in\Gamma, \quad \|\alpha\|_r\le\nu, \tag{1.4}$$

где $N(\nu)$ *— некоторое зависящее от* ν *число,* $\|B\| = \|B\|_{p\to q}$.

Лемма 1.3. *Семейство операторов* $\{G(x,y,v)\in L(L_p(H),L_p(H)) : x,y\in UA_{M,H}(\hat z)\}$ *ввиду условий* $\mathbf{K}_0)-\mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **c**) *равномерно ограничено и суперравностепенно квазинильпотентно, каковы бы ни были* $M>0$, $H\in T$, $v\in\mathcal{D}$, $\hat z\in L_p^m(H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольно $H\in T$, $M>0$, $v\in\mathcal{D}$, $\hat z\in L_p^m(H)$. Так как для любых $x,y\in UA_{M,H}(\hat z)$ имеем $\|A[y]\|_{q,l,H}\le\|A[\hat z]\|_{q,l,H}+M$ и $\|A[x-y]\|_{q,l,H}\le 2\left(\|A[\hat z]\|_{q,l,H}+M\right)$, то $|||\ J[x,y,v]\ |||_{r,H}\le\nu(M,H,v)$, где

$$\nu(M,H,v)\equiv\mathcal{N}\left(\max\{3(\|A[\hat z]\|_{q,l,H}+M),\|v\|_{k,s}\}\right).$$

Указанное в доказываемой лемме семейство операторов принадлежит $W(B,H,\nu(M,H,v))$ (см. $\mathbf{K}_3$) и **c**)). Теперь достаточно сослаться на **c**) и лемму 1.2. □

Лемма 1.4. *Ввиду условий* **b**), **c**) *оператор* $\tilde B\equiv S_{\Pi\setminus H}BQ_{\Pi\setminus H} : L_p(\Pi\setminus H)\to L_q(\Pi\setminus H)$ *при каждом* $H\in T$ *обладает свойством*

$\tilde{\mathbf{c}}$) *Семейство* $\left\{\alpha\tilde B\in L(L_p(\Pi\setminus H),L_p(\Pi\setminus H)) : \alpha\in\Gamma(\Pi\setminus H),\ \|\alpha\|_{r,\Pi\setminus H}\le\nu\right\}$ *суперравностепенно квазинильпотентно для любого* $\nu>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\alpha\in L_r(\Pi\setminus H)$ через $\tilde\alpha$ обозначим функцию $Q_{\Pi\setminus H}[\alpha]$. Заметим, что $(\alpha_1S_{\Pi\setminus H}BQ_{\Pi\setminus H})\cdot\ldots\cdot(\alpha_jS_{\Pi\setminus H}BQ_{\Pi\setminus H}) = S_{\Pi\setminus H}(\tilde\alpha_1B)\cdot\ldots\cdot(\tilde\alpha_jB)Q_{\Pi\setminus H}$ при любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_j\in\Gamma(\Pi\setminus H)$, $j\in\mathbb{N}$. Таким образом,

$$\left\|(\alpha_1S_{\Pi\setminus H}BQ_{\Pi\setminus H})\cdot\ldots\cdot(\alpha_jS_{\Pi\setminus H}BQ_{\Pi\setminus H})\right\|_{p,\Pi\setminus H\to p,\Pi\setminus H}\le\|(\tilde\alpha_1B)\cdot\ldots\cdot(\tilde\alpha_jB)\|_{p\to p}$$

и так как семейство операторов $\left\{(\tilde\alpha B)\in L(L_p,L_p) : \alpha\in\Gamma(\Pi\setminus H),\ \|\alpha\|_{r,\Pi\setminus H}\le\nu\right\}$ принадлежит семейству $W(B,\Pi,\nu)$, то из **c**) следует $\tilde{\mathbf{c}}$). □

З а м е ч а н и е 1.1. Нам потребуется следующее утверждение, являющееся обобщением известной леммы Гронуолла и частным случаем теоремы 1.9.3 из [16].

Утверждение 1.1 (обобщенная лемма Гронуолла). *Пусть*: $\mathbf{B}$ *— банахово пространство, полуупорядоченное по некоторому конусу* $K\subset\mathbf{B}$; $G:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ *— квазинильпотентный* ЛОО, *для которого конус* K *инвариантен. Если для некоторых* $x,y\in\mathbf{B}$ *имеем* $x\le G[x]+y$, *то* $x\le R(G)[y]$, *где* $R(G)\equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}G^k$.

Ниже данное утверждение применяется в случае лебегова пространства и конуса неотрицательных функций в нем.

Условие **b**) позволяет говорить о локальных решениях уравнения (0.1) на множествах $H\in T$. В силу условий $\mathbf{K}_0),\mathbf{K}_1)$, **a**) такие решения имеет смысл искать в классах $L_p^m(H)$. Функцию $z(\cdot)\in L_p^m(H)$ назовем отвечающим управлению $v(\cdot)\in D$ решением уравнения (0.1) на H, если она вместе с $v(\cdot)$ обращает (0.1) в тождество п.в. на H.

Теорема 1.1 (теорема единственности)**.** *Если выполняются условия* $\mathbf{K}_0)-\mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **c**)*, то каково бы ни было* $v \in \mathcal{D}$*, уравнение* (0.1) *не может иметь ни на каком* $H \in T$ *более одного решения в классе* $L_p^m(H)$.

Доказательство. Если $\Delta z \equiv z_1 - z_2$ — разность решений z_1, z_2, отвечающих v на H, то $|\Delta z(t)| = |F[z_1,v](t) - F[z_2,v](t)| \le |J[z_1,z_2,v](t)|\, B[|\,\Delta z\,|](t)$, $t \in H$ (см. (1.2)). Так как функция $\alpha(.) \equiv |\,J[z_1,z_2,v](.)\,|$ принадлежит $\Gamma(H)$, то в силу условия **c**) оператор $B_\alpha[.] : L_p(H) \to L_p(H)$, задаваемый формулой $B_\alpha[x](t) \equiv \alpha(t)B[x](t)$, $t \in H$, квазинильпотентен. То есть по обобщенной лемме Гронуолла $\Delta z(t) \equiv 0$, $t \in H$. □

Локальное решение $z(.) \in L_p^m(H)$, отвечающее управлению $v \in \mathcal{D}$, будем обозначать $z_{v,H}$. Решение $z_{v,\Pi}$ будем называть глобальным решением, отвечающим управлению v; вместо $z_{v,\Pi}$ будем писать z_v.

Теореме существования локального решения предпошлем лемму об оценочной функции операторов $F[.,v] : L_p^m(H) \to L_p^m(H)$ на множествах $UA_{M,H}(\hat z)$. Для $v \in \mathcal{D}$, $H \in T$, $M \in \mathbf{R}_+$, $\hat z \in L_p^m(H)$ положим

$$\Xi(v,H,M,\hat z) \equiv M\varphi_B(H)\mathcal{N}\big(\max\big\{\|A[\hat z]\|_{q,l,H} + M, \|v\|_{k,s}\big\}\big) + \|A[F[\hat z,v] - \hat z]\|_{q,l,H}, \qquad (1.5)$$

где использована функция множества $\varphi_B(h) \equiv \|P_h B P_h\|_{p\to q} = \|P_h B Q_h\|_{p,h\to q}$, $h \in \Sigma$.

Лемма 1.5. *Ввиду условий* **a**), **b**) *при любых* $v \in \mathcal{D}$, $H \in T$, $M \in \mathbf{R}_+$, $\hat z \in L_p^m(H)$ *справедлива оценка*:

$$\|A\,[F[z,v] - \hat z]\|_{q,l,H} \le \Xi(v,H,M,\hat z), \quad z \in UA_{M,H}(\hat z).$$

Доказательство. Для любого $z \in L_p^m(H)$

$$\|A\,[F[z,v] - \hat z]\|_{q,l,H} \le \|A\,[F[z,v] - F[\hat z,v]]\,\|_{q,l,H} + \|A\,[F[\hat z,v] - \hat z]\,\|_{q,l,H}. \qquad (1.6)$$

В силу **a**), **b**) и (1.2)

$$\begin{gathered}\|A\,[F[z,v] - F[\hat z,v]]\,\|_{q,l,H} = \|A[J[z,\hat z,v]A[z-\hat z]]\|_{q,l,H} \le \\ \le \|B[|\,J[z,\hat z,v]\,|\cdot|\,A[z-\hat z]\,|]\|_{q,H} = \|P_H B Q_H[|\,J[z,\hat z,v]\,|\cdot|\,A[z-\hat z]\,|]\|_q.\end{gathered} \qquad (1.7)$$

Так как

$$\|P_H B Q_H[|\,J[z,\hat z,v]\,|\cdot|\,A[z-\hat z]\,|]\|_q \le \|P_H B Q_H\|_{p,H\to q}\cdot\|\,|J[z,\hat z,v]|\,\|_{r,H}\cdot\|\,|A[z-\hat z]|\,\|_{q,H},$$

а в силу (1.1) для $z \in UA_{M,H}(\hat z)$

$$\||J[z,\hat z,v]|\|_{r,H} \le \mathcal{N}\left(\max\left\{\|A[\hat z]\|_{q,l,H} + M, \|v\|_{k,s}\right\}\right),$$

то из (1.6), (1.7) следует доказываемая оценка. □

Теорема 1.2 (теорема существования)**.** *Пусть выполняются условия* $\mathbf{K}_0)-\mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **c**)*. Если для некоторых* $v \in \mathcal{D}$, $H \in T$, $M \in \mathbf{R}_+$, $\hat z \in L_p^m(H)$

$$\Xi(v,H,M,\hat z) < M, \qquad (1.8)$$

то (0.1) *имеет единственное в* $L_p^m(H)$ *решение* $z_{v,H}$ *и* $\|A[z_{v,H} - \hat z]\|_{q,l,H} \le \Xi(v,H,M,\hat z)$.

Доказательство. Пусть для набора $v, H, M, \hat{z}$ выполняется (1.8). В силу (1.8) и леммы 1.5 оператор $F[.,v] : L_p^m(H) \to L_p^m(H)$ отображает замкнутое множество $X \equiv UA_{M,H}(\hat{z})$ само в себя. Покажем, что $F[.,v]$ сжимает на X, что в силу теоремы 1.1 завершит доказательство теоремы 1.2. Имеем (см. **a**), (1.2))

$$|F[x,v](t) - F[y,v](t)| \leq G(x,y,v)\,[|x-y|]\,(t), \quad t \in H, \quad x,y \in X. \tag{1.9}$$

Семейство операторов $\{G(x,y,v) \in L(L_p(H), L_p(H)) : x,y \in X\}$ суперравностепенно квазинильпотентно по лемме 1.3. Положим $C \equiv 2 \sup\limits_{x,y\in X} \|G(x,y,v)\|_{p,H\to p,H}$, что корректно в силу (1.1). Если $C = 0$, то в силу (1.9) оператор $F[.,v]$ постоянен на X и теорема доказана. Пусть $C \neq 0$. Применим к семейству $\{G(x,y,v) \in L(L_p(H), L_p(H)) : x,y \in X\}$ теорему 0.1, взяв в ней $\mathbf{\Gamma} = X \times X$, $\varepsilon = C^{-1}$. Существует норма $\|.\|_{(\varepsilon)}$, эквивалентная норме $\|.\|_{p,H}$, монотонная относительно полуупорядоченности $L_p(H)$ по конусу неотрицательных функций и такая, что $\|G(x,y,v)[z]\|_{(\varepsilon)} \leq \varepsilon \|z\|_{(\varepsilon)}$ для $z \in L_p(H)$. Из (1.9) получаем, что в норме $\||\,.\,|\|_{(\varepsilon)}$, эквивалентной норме $\|.\|_{p,m,H}$, оператор $F[.,v]$ является сжимающим на X с коэффициентом сжатия $1/2$. □

Для рассмотрения вопроса о достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений уравнения (0.1) нам удобно ввести следующие определения. Если цепочка множеств $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_{\mathbf{k}}\}$ принадлежит системе T, на которой B вольтерров, то называем $\mathcal{T}$ *вольтерровой цепочкой оператора* B. Пусть $\delta > 0$ — некоторое число; говорим, что ЛОО $B : L_p \to L_q$ удовлетворяет δ-условию на множестве $H \in \Sigma$, если $\|P_H B P_H\|_{p\to q} < \delta$. Цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_{\mathbf{k}}\}$ назовем *δ-цепочкой* ЛОО $B : L_p \to L_q$, если B удовлетворяет δ-условию на каждой разности $H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,\mathbf{k}}$. Назовем вольтеррову цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_{\mathbf{k}}\}$ ЛОО $B : L_p \to L_q$ *вольтерровой сильной δ-цепочкой оператора* B, если $\left\|P_{H_i\setminus H_{i-1}} B P_{H_j\setminus H_{j-1}}\right\|_{p\to q} \leq \delta$, $\mathbf{k} \geq i \geq j \geq 1$. Назовем цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_{\mathbf{k}}\} \subset \Sigma$ *δ-малой по мере*, если $mes(H_i \setminus H_{i-1}) < \delta$ для всех $i = 1, \ldots, \mathbf{k}$.

Пусть $\Omega = \Omega(\Pi)$ — класс тех $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает единственное глобальное решение $z_v \in L_p^m$ уравнения (0.1). Предполагаем, что $\Omega(\Pi) \neq \emptyset$. Произвольно фиксируем некоторый элемент $v_0 \in \Omega(\Pi)$ и пусть $z_0 \equiv z_{v_0}$. Для $v \in \mathcal{D}$ положим:

$$\Delta_v f(z_0)(t) \equiv f(t, A[z_0](t), v(t)) - f(t, A[z_0](t), v_0(t)),\ t \in \Pi; \quad r(v,v_0) \equiv \|A[\Delta_v f(z_0)]\|_{q,l}.$$

Сформулируем основную теорему данной статьи.

Теорема 1.3 (теорема устойчивости существования глобальных решений)**.** *Пусть выполняются условия* $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$, $\mathbf{a}), \mathbf{b}), \mathbf{c})$. *Тогда для любых* $d > 0$, $d_0 > 0$, $v_0 \in \Omega(\Pi)$ *существуют* $\delta > 0$, $C > 0$ *такие, что если некоторое* $v \in \mathcal{D}$ *удовлетворяет неравенствам:* 1) $\|v - v_0\|_{k,s} < d_0$, 2) $\|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} < d$, 3) $r(v,v_0) < \delta$, *причем* 4) *мажоранта* $B : L_p \to L_q$ *имеет вольтеррову* δ*-цепочку, то* $v \in \Omega(\Pi)$ *и*

$$\|z_v - z_0\|_{p,m} \leq C \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m}\ , \tag{1.10}$$

$$\|A[z_v - z_0]\|_{q,l} \leq C \cdot r(v,v_0). \tag{1.11}$$

Теорема 1.3 имеет условный характер и удобнее применять ее следствие, получающееся из нее заменой условия 4) следующим более сильным условием

d) Для любого $\delta > 0$ оператор $B : L_p \to L_q$ имеет вольтеррову δ-цепочку.

Следствие 1.1. *Пусть выполняются условия* $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **c**), **d**). *Тогда для любых* $d > 0$, $d_0 > 0$ *и* $v_0 \in \Omega(\Pi)$ *существуют* $\delta > 0$, $C > 0$ *такие, что если* $v \in \mathcal{D}$ *удовлетворяет неравенствам* 1), 2), 3) *теоремы* 1.3, *то* v *принадлежит классу* $\Omega(\Pi)$ *и справедливы оценки* (1.10), (1.11).

Заменяя в следствии 1.1 условия **c**) и **d**) теми или иными конкретными условиями, достаточными для выполнения **c**) и **d**), получаем конкретные признаки УСГР уравнения (0.1). Приведем примеры. Воспользуемся достаточными условиями суперравностепенной квазинильпотентности семейства ЛОО $B_\alpha : L_p \to L_p$ $(\alpha \in \Gamma)$, задаваемых формулой $B_\alpha[z](t) \equiv \alpha(t)B[z](t)$, $t \in \Pi$, $z \in L_p$, полученными в [11, §4]. Введем следующие условия **e**) и **f**).

e) Для любого $\delta > 0$ оператор $B : L_p \to L_q$ имеет вольтеррову сильную δ-цепочку.

f) Для любого $\delta > 0$ оператор $B : L_p \to L_q$ имеет $\delta-$малую по мере вольтеррову цепочку.

Непосредственно из следствия 1.1 и [11, Предложение 2] получаем

Следствие 1.2. *Пусть* Γ *ограничено в* L_r *и выполняются* $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **e**). *Тогда справедливы все выводы следствия* 1.1.

Напомним, что семейство $\Gamma \subset L_r(\Pi)$ $(r \in [1, \infty))$ называется семейством функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $H \in \Sigma$ с мерой $mes H < \delta$ имеем $\|\alpha\|_{r,H} < \varepsilon$ при всех $\alpha \in \Gamma$. Как следует из неравенства Гельдера, семейством с равностепенно абсолютно непрерывными L_r-нормами является, например, любое ограниченное в некоторой норме L_ν, $\nu \in (r, \infty]$, множество из L_r. Следующие два следствия получаем непосредственно из следствия 1.1 и предложений [11, Предложения 1 и 3].

Следствие 1.3. *Пусть* $p < q$, Γ *— семейство функций с равностепенно абсолютно непрерывными* L_r*-нормами и выполняются* $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **f**). *Тогда справедливы все выводы следствия* 1.1.

Следствие 1.4. *Пусть* Γ *ограничено в* L_r, B *как оператор из* L_p *в* L_q *вполне непрерывен и выполняются* $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **f**). *Тогда справедливы все выводы следствия* 1.1. *Условие вполне непрерывности здесь может быть ослаблено до условия*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ЛОО } B : L_p \to L_q \textit{ переводит единичный шар в множество} \\ \textit{функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами.} \end{array} \right. \tag{1.12}$$

Приведем полезное обобщение следствия 1.2, получающееся «объединением» условий **f**) и (1.12). Пусть $\mathcal{H} \subset \Sigma$, $\mathcal{M} \subset L_q$. Будем говорить, что семейство функций $\mathcal{M}$ обладает $\mathcal{H}$*-равностепенно абсолютно непрерывными* L_q*-нормами*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $H \in \mathcal{H}$, $mes H < \delta$ имеем $\|\alpha\|_{q,H} < \varepsilon$ при всех $\alpha \in \mathcal{M}$. Из следствия 1.1 и [11, Предложение 4] вытекает

Следствие 1.5. *Пусть* Γ *ограничено в* L_r *и выполнены условия* $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), *а также* **f**), *которое запишем следующим образом*: *для любого* $\delta > 0$ ЛОО $B : L_p \to L_q$ *имеет* δ*-малую по мере вольтеррову цепочку* $\mathcal{T}_\delta$. *Пусть* $\mathcal{H} \equiv \bigcup_{\delta > 0} \mathcal{T}_\delta^{(-)}$. *Если* ЛОО $B : L_p \to L_q$ *переводит единичный шар в множество функций с* $\mathcal{H}$*-равностепенно абсолютно непрерывными* L_q*-нормами, то справедливы все выводы следствия* 1.1.

2. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1.3 опирается на доказываемые ниже леммы об оценке разности решений и о продолжении решений. Далее считаем выполненными условия $\mathbf{K}_0)-\mathbf{K}_3)$, **a**), **b**), **c**), управление $v_0 \in \Omega(\Pi)$ фиксированным, примем обозначения

$$z_0 \equiv z_{v_0},\;\; \kappa_0 \equiv \|v_0\|_{k,s},\;\; \kappa \equiv \|z_0\|_{p,m},\;\; \kappa_A \equiv \|A[z_0]\|_{q,l},\;\; \|A\| \equiv \|A\|_{p,m\to q,l},\;\; \|B\| \equiv \|B\|_{p\to q}.$$

Лемма 2.1 (лемма об оценке разности решений)**.** *Существует зависящая лишь от* v_0, *оператора* B *и функции* $\mathcal{N}(.)$ *неубывающая функция* $\gamma(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *такая, что если некоторым* $v \in \mathcal{D}$ *и* $H \in T$ *отвечает решение* $z = z_{v,H}$ *уравнения* (0.1), *то*

$$\|z - z_0\|_{p,m,H} \le \gamma(M_0)\|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m,H}, \tag{2.1}$$

$$\|A[z - z_0]\|_{q,l,H} \le \gamma(M_0) r(v, v_0), \tag{2.2}$$

где M_0 *— любая постоянная, удовлетворяющая неравенству*

$$M_0 \ge \max\big\{\|A[z - z_0]\|_{q,l,H},\; \|v - v_0\|_{k,s}\big\}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta z(t) \equiv z(t) - z_0(t)$, $t \in H$. Имеем

$$\Delta z(t) = \big\{F[z, v](t) - F[z_0, v](t)\big\} + \Delta_v f(z_0)(t),\;\; t \in H,$$

откуда (см.(1.2))

$$\Delta z(t) = \{J[z, z_0, v](t)\}\, A[\Delta z]\,(t) + \Delta_v f(z_0)(t), \quad t \in H, \tag{2.4}$$

и следовательно,

$$|\Delta z(t)| \le \alpha(t) B[|\,\Delta z\,|](t) + |\Delta_v f(z_0)(t)|\,, \quad t \in H, \tag{2.5}$$

где принято обозначение $\alpha(t) \equiv |J[z, z_0, v](t)|\,,$ $t \in H$. В силу (1.1)

$$\|\alpha\|_{r,H} \le \mathcal{N}\left(\max\left\{\kappa_A + \|A[\Delta z]\|_{q,l,H}\,,\; \kappa_0 + \|v - v_0\|_{k,s}\right\}\right)$$

и при любой постоянной M_0, удовлетворяющей (2.3), выполняется неравенство

$$\|\alpha\|_{r,H} \le \nu(M_0), \tag{2.6}$$

в котором

$$\nu(M) \equiv \mathcal{N}\left(\max\left\{\kappa_A + M,\; \kappa_0 + M\right\}\right), \quad M \in \mathbf{R}_+. \tag{2.7}$$

Из (2.5) получаем $|\Delta z(t)| \le R(\alpha B)\,[|\Delta_v f(z_0)|]\,(t)$, $t \in H$, и, следовательно,

$$\|\Delta z\|_{p,m,H} \le \|R(\alpha B)\|_{p\to p} \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m,H}. \tag{2.8}$$

Из (2.6), (2.8) и леммы 1.2, получаем

$$\|\Delta z\|_{p,m,H} \le \Phi_1(\nu(M_0)) \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m,H}. \tag{2.9}$$

Подействовав на (2.4) оператором A, с учетом **a**) находим

$$|A[\Delta z](t)| \le B[\alpha\, |A[\Delta z](.)|] + |A[\Delta_v f(z_0)](t)|\,, \quad t \in H,$$

откуда $|A[\Delta z](t)| \le R(B\alpha)\,[|A\,[\Delta_v f(z_0)]|]\,(t), \quad t \in H,$ и, следовательно,

$$\|A[\Delta z]\|_{q,l,H} \le \|R(B\alpha)\|_{q\to q} \cdot r(v, v_0). \tag{2.10}$$

Из (2.6), (2.10) и леммы 1.2

$$\|A[\Delta z]\|_{q,l,H} \le \Phi_2(\nu(M_0)) \cdot r(v, v_0). \tag{2.11}$$

Положив $\gamma(M) \equiv \max\{\Phi_1(\nu(M)),\ \Phi_2(\nu(M))\}\,,\ M \in \mathbf{R}_+,$ из (2.9) получаем неравенство (2.1), а из (2.11) — неравенство (2.2). □

Пусть теперь управлению $v \in D$ отвечает на некотором $\overline{H} \in T,\ 0 < mes\overline{H} < mes\Pi,$ решение $z_{v,\overline{H}}$ уравнения (0.1). Если для некоторого $H \in T,\ H \supset \overline{H},$ существует решение $z_{v,H},$ то его сужение $z_{v,H}|_{\overline{H}}$ есть отвечающее управлению v решение уравнения (0.1) на $\overline{H}$ и по теореме 1.1 $z_{v,H}\,(t) = z_{v,\overline{H}}\,(t)\,,\ t \in \overline{H}.$ Такое решение $z_{v,H}$ назовем *продолжением решения* $z_{v,\overline{H}}$ *с множества* $\overline{H}$ *на множество* H. Рассмотрим задачу о возможности продолжения решения $z_{v,\overline{H}}$ с множества $\overline{H}$ на более широкое множество системы T. Она эквивалентна задаче о существовании локального решения уравнения

$$z(t) = \tilde{f}\big(t,\, \tilde{A}[z](t),\, v(t)\big), \quad t \in \Pi \setminus \overline{H}, \quad z \in L_p^m(\Pi \setminus \overline{H}), \tag{2.12}$$

где $\tilde{f}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : (\Pi \setminus \overline{H}) \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — функция, задаваемая формулой

$$\tilde{f}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv f\left(t,\, \mathbf{p} + AQ_{\overline{H}}\left[z_{v,\overline{H}}\right](t),\, \mathbf{v}\right), \quad t \in \Pi \setminus \overline{H}, \quad \mathbf{p} \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^s,$$

$\tilde{A}[.] : L_p^m(\Pi \setminus \overline{H}) \to L_q^l(\Pi \setminus \overline{H})$ — оператор, задаваемый формулой

$$\tilde{A}[x](t) \equiv AQ_{\Pi\setminus\overline{H}}[x](t), \quad t \in \Pi \setminus \overline{H}, \quad x \in L_p^m(\Pi \setminus \overline{H}),$$

и имеющий мажоранту $\tilde{B}[.] : L_p(\Pi \setminus \overline{H}) \to L_q(\Pi \setminus \overline{H}),$ задаваемую формулой

$$\tilde{B}[x](t) \equiv BQ_{\Pi\setminus\overline{H}}[x](t), \quad t \in \Pi \setminus \overline{H}, \quad x \in L_p(\Pi \setminus \overline{H}).$$

Очевидно, оператор $\tilde{B}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{B} \in V(T_{-\overline{H}}), \tag{2.13}$$

где $T_{-\overline{H}} \equiv \{H \setminus \overline{H}\ :\ H \in T\},$ являющемуся аналогом условия **b**). По лемме 1.4 для оператора $\tilde{B}$ выполняется условие $\widetilde{\mathbf{c}}$), аналог условия **c**). Для функции $\tilde{f}$ выполняются точные аналоги условий $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3$). При этом роль функции $\mathcal{N}(.)$ играет функция

$$\tilde{\mathcal{N}}(M) \equiv \mathcal{N}\left(M + \|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}}]\|_{q,l,\Pi\setminus\overline{H}}\right), \quad M \in \mathbf{R}_+. \tag{2.14}$$

Последнее утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.2. *Для любого* $h \in \Sigma$ *и любых* $y(.) \in L_p^m(h),\ \ v(.) \in L_k^s(h)$ *справедливо неравенство* $\left\|f'_{\mathbf{p}}\,(.,\, y(.),\, v(.))\right\|_{r,m\times l,h} \le \mathcal{N}\big(\max\big\{\|y\|_{q,l,h},\, \|v\|_{k,s,h}\big\}\big)$.

Доказательство. В силу $\mathbf{K}_2)$ имеем

$$\left\|f'_{\mathbf{p}}(.,\, y(.),\, v(.))\right\|_{r,m\times l,h} =$$
$$= \left\|Q_h\left[f'_{\mathbf{p}}\left(.,\, Q_h[y](.),\, Q_h[v](.)\right)\right]\right\|_{r,m\times l} \le \left\|f'_{\mathbf{p}}\left(.,\, Q_h[y](.),\, Q_h[v](.)\right)\right\|_{r,m\times l} \le$$
$$\le \mathcal{N}\left(\max\left\{\|Q_h[y]\|_{q,l},\; \|Q_h[v]\|_{k,s}\right\}\right) = \mathcal{N}\left(\max\left\{\|y\|_{q,l,h},\; \|v\|_{k,s,h}\right\}\right).$$

□

Из леммы 2.2 при $h = \Pi\setminus\overline{H}$ получаем для любых $y(.)\in L^m_p(\Pi\setminus\overline{H}),\;\; v(.)\in L^s_k(\Pi\setminus\overline{H}):$

$$\left\|f'_{\mathbf{p}}\left(.,y(.) + AQ_{\overline{H}}\left[z_{v,\overline{H}}\right](.),v(.)\right)\right\|_{r,m\times l,\Pi\setminus\overline{H}} \le$$
$$\le \mathcal{N}\Big(\max\left\{\|y\|_{q,l,\Pi\setminus\overline{H}} + \|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}}]\|_{q,l,\Pi\setminus\overline{H}},\; \|v\|_{k,s,\Pi\setminus\overline{H}}\right\}\Big) \le \tilde{\mathcal{N}}\Big(\max\left\{\|y\|_{q,l,\Pi\setminus\overline{H}},\; \|v\|_{k,s,\Pi\setminus\overline{H}}\right\}\Big),$$

что означает справедливость высказанного выше утверждения относительно функции (2.14).

Таким образом, уравнение (2.12) подобно уравнению (0.1) и задачу о продолжении решений уравнения (0.1) можно решать, применяя к (2.12) теорему 1.2, взяв в этой теореме вместо $\Pi, T, f, \mathcal{D}, v$ соответственно $\Pi\setminus\overline{H},\;\; T_{-\overline{H}},\;\; \tilde{f},\;\; \tilde{\mathcal{D}} \equiv \left\{v\Big|_{\Pi\setminus\overline{H}} : v\in\mathcal{D}\right\},\;\; \tilde{v}\equiv v\Big|_{\Pi\setminus\overline{H}}$. Для уравнения (2.12) аналогом функции Ξ из (1.5) является функция

$$\tilde{\Xi}(\tilde{v},h,M,\hat{z}) \equiv M\cdot\varphi_{\tilde{B}}(h)\cdot\tilde{\mathcal{N}}\Big(\max\left\{\left\|\tilde{A}[\hat{z}]\right\|_{q,l,h} + M,\; \left\|\tilde{v}\right\|_{k,s,\Pi\setminus\overline{H}}\right\}\Big) + \left\|\tilde{A}\left[\tilde{F}[\hat{z},\tilde{v}] - \hat{z}\right]\right\|_{q,l,h} \equiv$$
$$\equiv \tilde{\Xi}_1(\tilde{v},h,M,\hat{z}) + \tilde{\Xi}_2(\tilde{v},h,M,\hat{z}),\;\; \tilde{v}\in\tilde{\mathcal{D}},\;\; h\in T_{-\overline{H}},\;\; M\in\mathbf{R}_+,\;\; \hat{z}\in L^m_p(h),$$

где $\varphi_{\tilde{B}}(h) \equiv \left\|\tilde{P}_h\tilde{B}\tilde{P}_h\right\|_{p,\Pi\setminus\overline{H}\to q,\Pi\setminus\overline{H}}$ $(h\in\Sigma_{\Pi\setminus\overline{H}})$, $\tilde{P}_h$ — оператор умножения на характеристическую функцию $\tilde{\chi}_h(t)\equiv\left\{1,\, t\in h;\; 0,\, t\notin h\right\},\;\; t\in\Pi\setminus\overline{H}$,

$$\tilde{F}[\hat{z},\tilde{v}](t) \equiv \tilde{f}(t,\tilde{A}[\hat{z}](t),\tilde{v}(t)),\quad t\in\Pi\setminus\overline{H},\quad \hat{z}\in L^m_p(\Pi\setminus\overline{H}),\quad \tilde{v}\in\tilde{\mathcal{D}}.$$

Оценим величину $\tilde{\Xi}(\tilde{v},h,M,z_0)$. Имеем

$$\varphi_{\tilde{B}}(h) = \|\tilde{P}_h S_{\Pi\setminus\overline{H}} B Q_{\Pi\setminus\overline{H}}\tilde{P}_h\|_{p,\Pi\setminus\overline{H}\to q,\Pi\setminus\overline{H}} =$$
$$= \|\tilde{P}_h S_{\Pi\setminus\overline{H}} B P_h\|_{p\to q,\Pi\setminus\overline{H}} = \|P_h B P_h\|_{p\to q} = \varphi_B(h),\quad h\in\Sigma_{\Pi\setminus\overline{H}}; \tag{2.15}$$
$$\|\tilde{A}[z_0]\|_{q,l,h} \le \|A\|\cdot\kappa; \tag{2.16}$$
$$\|\tilde{v}\|_{k,s,\Pi\setminus\overline{H}} \le \kappa_0 + \|v - v_0\|_{k,s}; \tag{2.17}$$
$$\|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}}]\|_{q,l,\Pi\setminus\overline{H}} \le \|AQ_{\overline{H}}[z_0]\|_{q,l,\Pi\setminus\overline{H}} + \|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0]\|_{q,l,\Pi\setminus\overline{H}} \le$$
$$\le \|A\|\cdot\kappa + \|A\|\cdot\|z_{v,\overline{H}} - z_0\|_{p,m,\overline{H}}. \tag{2.18}$$

Из (2.14)–(2.18) получаем

$$\tilde{\Xi}_1(\tilde{v},h,M,z_0) \le M\varphi_B(h)\cdot\sigma\left(\left\|z_{v,\overline{H}} - z_0\right\|_{p,m,\overline{H}},\;\; \|v - v_0\|_{k,s},\;\; M\right), \tag{2.19}$$

где принято обозначение

$$\sigma(\xi,\eta,M) \equiv \mathcal{N}\big(\sigma_1(\eta,M) + \|A\|(\kappa+\xi)\big), \tag{2.20}$$
$$\sigma_1(\eta,M) \equiv \max\left\{\|A\|\cdot\kappa + M,\;\; \kappa_0 + \eta\right\},\quad \xi,\eta,M\in\mathbf{R}_+. \tag{2.21}$$

Оценим величину $\tilde{\Xi}_2(\tilde{v}, h, M, z_0)$. Имеем

$$\left\|\tilde{A}\left[\tilde{F}[z_0, \tilde{v}] - z_0\right]\right\|_{q,l,h} \leq \left\|\tilde{A}\left[\tilde{F}[z_0, \tilde{v}] - F[z_0, \tilde{v}]\right]\right\|_{q,l,h} + \left\|\tilde{A}[\Delta_v f(z_0)]\right\|_{q,l,h}, \tag{2.22}$$

$$\left\|\tilde{A}[\Delta_v f(z_0)]\right\|_{q,l,h} = \left\|AQ_{\Pi\setminus\overline{H}}[\Delta_v f(z_0)]\right\|_{q,l,h} \leq \|B\| \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m}. \tag{2.23}$$

По теореме о конечных приращениях при $t \in \Pi \setminus \overline{H}$ имеем

$$\tilde{F}[z_0, \tilde{v}](t) - F[z_0, \tilde{v}](t) = I\left(t, A[z_0](t), AQ_{\overline{H}}\left[z_{v,\overline{H}} - z_0\right](t), v(t)\right) \cdot AQ_{\overline{H}}\left[z_{v,\overline{H}} - z_0\right](t),$$

что вместе с (2.13), (2.15) дает

$$\left\|\tilde{A}\left[\tilde{F}[z_0, \tilde{v}] - F[z_0, \tilde{v}]\right]\right\|_{q,l,h} \leq \varphi_B(h) \cdot \left\|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0]\right\|_{q,l,h} \cdot$$

$$\cdot \left\|I(., A[z_0](.), AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0](.), v(.))\right\|_{r,m\times l,h}. \tag{2.24}$$

По лемме 2.2

$$\left\|I(., A[z_0](.), AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0](.), v(.))\right\|_{r,m\times l,h} \leq$$

$$\leq \mathcal{N}\left(\max\left\{\|A[z_0]\|_{q,l,h} + \left\|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0]\right\|_{q,l,h},\ \|v\|_{k,s}\right\}\right) \leq$$

$$\leq \mathcal{N}\left(\max\left\{\|A\| \cdot \left(\kappa + \left\|z_{v,\overline{H}} - z_0\right\|_{p,m,\overline{H}}\right),\ \kappa_0 + \|v - v_0\|_{k,s}\right\}\right). \tag{2.25}$$

Из (2.22)–(2.25) получаем

$$\tilde{\Xi}_2(\tilde{v}, h, M, z_0) \leq \|B\| \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} + \varphi_B(h) \cdot \sigma_2\left(\left\|z_{v,\overline{H}} - z_0\right\|_{p,m,\overline{H}},\ \|v - v_0\|_{k,s}\right), \tag{2.26}$$

где

$$\sigma_2(\xi, \eta) \equiv \|A\| \cdot \xi \cdot \mathcal{N}\left(\max\left\{\|A\|\left(\kappa + \xi\right),\ \kappa_0 + \eta\right\}\right), \quad \xi, \eta \in \mathbf{R}_+. \tag{2.27}$$

Из (2.19), (2.26) окончательно находим

$$\begin{gathered}\tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M, z_0) \leq \|B\| \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} + \varphi_B(h) \cdot \Phi\Big(\left\|z_{v,\overline{H}} - z_0\right\|_{p,m,\overline{H}}, \|v - v_0\|_{k,s}, M\Big), \\ \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad h \in T_{-\overline{H}}, \quad M \in \mathbf{R}_+,\end{gathered} \tag{2.28}$$

где принято обозначение

$$\Phi(\xi, \eta, M) \equiv M \cdot \sigma(\xi, \eta, M) + \sigma_2(\xi, \eta), \quad \xi, \eta, M \in \mathbf{R}_+. \tag{2.29}$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Существует зависящая лишь от управления v_0 и функции $\mathcal{N}(.)$ неубывающая по каждому из своих аргументов (при фиксированных остальных) функция $\Phi(.,.,.) : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что если для некоторых $v \in \mathcal{D}$, $\overline{H} \in T$ уравнение* (0.1) *имеет решение $z_{v,\overline{H}}$, то для любых $h \in T_{-\overline{H}}$, $M \in \mathbf{R}_+$ справедлива оценка* (2.28)*. Такой функцией является, например, функция, определяемая формулами* (2.29), (2.20), (2.21), (2.27).

Лемма 2.3 позволяет доказать следующий результат.

Лемма 2.4 (лемма о продолжении решений). *Пусть заданы числа* $d > 0$, $d_0 > 0$. *Для любого числа* $M_0 > 0$ *и любого достаточно большого числа* $M_1 > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если управлению* $v \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющему неравенствам*

$$\|v - v_0\|_{k,s} < d_0, \tag{2.30}$$

$$\|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} < d, \tag{2.31}$$

на множестве $\overline{H} \in T$, $0 < mes\,\overline{H} < mes\,\Pi$, *отвечает локальное решение* $z_{v,\overline{H}}$ *уравнения* (0.1), *подчиняющееся неравенству*

$$\left\|A[z_{v,\overline{H}} - z_0]\right\|_{q,l,\overline{H}} < M_0, \tag{2.32}$$

то это решение продолжимо с множества $\overline{H}$ *на множество* $H = \overline{H} \cup h$ *при*

$$h \in T_{-\overline{H}}, \quad \varphi_B(h) < \delta, \tag{2.33}$$

причем

$$\left\|AQ_{\Pi\setminus\overline{H}}[z_{v,H} - z_0]\right\|_{q,l,h} < M_1. \tag{2.34}$$

Указанными свойствами для любой пары чисел $M_0 > 0$,

$$M_1 > \|B\| \cdot d \tag{2.35}$$

обладает число $\delta > 0$ *такое, что*

$$\delta \cdot \Phi\left(d \cdot \gamma\left(\max\{M_0, d_0\}\right), \, d_0, \, M_1\right) < M_1 - \|B\| \cdot d, \tag{2.36}$$

где $\gamma(.)$ *и* $\Phi(.,.,.)$ *— функции из лемм* 2.1 *и* 2.3 *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся, как указано выше, теоремой 1.2. Фиксируем произвольно $M_0 > 0$, M_1, удовлетворяющее неравенству (2.35), и некоторое $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству (2.36). Достаточно применить теорему 1.2 к уравнению (2.12), проверив выполнение неравенства

$$\tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M_1, z_0) < M_1, \tag{2.37}$$

аналог неравенства (1.8). Докажем, что из (2.30)–(2.33), (2.35), (2.36) следует (2.37). В силу (2.30)–(2.31) и оценки (2.1) леммы 2.1

$$\|z_{v,\overline{H}} - z_0\|_{p,m,\overline{H}} \leq \gamma(\max\{M_0, d_0\}) \cdot d. \tag{2.38}$$

Из (2.38), (2.28), (2.30), (2.33) получаем неравенство

$$\tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M_1, z_0) \leq d \cdot \|B\| \, + \, \delta \cdot \Phi\left(d \cdot \gamma\left(\max\{M_0, d_0\}\right), \, d_0, \, M_1\right),$$

которое вместе с (2.36) дает (2.37). □

Переходим к доказательству теоремы 1.3. Произвольно фиксируем $d > 0$, $d_0 > 0$. Выберем $M_0 > 0$ так, что

$$M_0 > \|B\| \cdot d, \quad M_0 > d_0. \tag{2.39}$$

Пусть $\gamma(.)$ — некоторая функция, существующая по лемме 2.1, $\Phi(.,.,.)$ — функция (2.29) из леммы 2.3, а $\delta > 0$ — некоторое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\delta \cdot \Phi(d \cdot \gamma(M_0), d_0, M_0) < M_0 - \|B\| \cdot d, \tag{2.40}$$

$$\delta \cdot \gamma(M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d) < M_0, \tag{2.41}$$

а также условию 4) теоремы 1.3: оператор B имеет вольтеррову δ-цепочку. Докажем, что указанное число δ обладает требуемыми свойствами, то есть при условиях 1), 2), 3) теоремы 1.3 управление $v \in \mathcal{D}$ принадлежит классу $\Omega(\Pi)$ (условие 4) теоремы 1.3 выполняется по предположению).

Пусть $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_{\mathbf{k}}\}$ — δ-цепочка оператора B, существующая по условию 4). Будем считать, что $mes(H_i \setminus H_{i-1}) > 0$, $i = 1, \ldots, \mathbf{k}$. В силу теоремы 1.2 существует решение z_{v,H_1} и $\|A[z_{v,H_1} - z_0]\|_{q,l,H_1} < M_0$. Действительно, по определению δ-цепочки и в силу (1.5), условий 1) и 2) имеем

$$\Xi(v, H_1, M_0, z_0) \le M_0 \cdot \delta \cdot \mathcal{N}\left(\max\left\{\|A\| \cdot \kappa + M_0,\ d_0 + \kappa_0\right\}\right) + d \cdot \|B\|. \tag{2.42}$$

Так как $M_0 \cdot \mathcal{N}\left(\max\left\{\|A\| \cdot \kappa + M_0,\ d_0 + \kappa_0\right\}\right) \le \Phi\left(d \cdot \gamma(M_0),\ d_0,\ M_0\right)$ (см. (2.20), (2.21), (2.29)), то из (2.40), (2.42) получаем неравенство $\Xi(v, H_1, M_0, z_0) < M_0$, означающее выполнение для уравнения (0.1) условий теоремы 1.2 при $H = H_1$, $M = M_0$, $\hat{z} = z_0$.

Докажем, что решение z_{v,H_1} можно последовательными продолжениями с H_1 на H_2, с H_2 на $H_3, \ldots$ распространить на все $\Pi = H_{\mathbf{k}}$, причем для глобального решения z_v будет

$$\|A[z_v - z_0]\|_{q,l} < M_0. \tag{2.43}$$

Действуя по индукции, предположим, что для некоторого $i = \overline{2, \mathbf{k}}$ уже доказано существование решения $z_{v,H_{i-1}}$, причем

$$\left\|A[z_{v,H_{i-1}} - z_0]\right\|_{q,l,H_{i-1}} < M_0; \tag{2.44}$$

для $i = 2$ это доказано. Применим лемму 2.4, взяв в ней $\overline{H} = H_{i-1}$, $h = H_i \setminus H_{i-1}$, фиксированное нами число M_0 и число $M_1 = M_0$. Лемма 2.4 применима, так как в данном случае выполняются условия (2.30)–(2.33), (2.35), (2.36). Действительно: условия 1) и 2) теоремы 1.3 тождественны условиям (2.30) и (2.31) леммы 2.4; предположение (2.44) эквивалентно условию (2.32); (2.33) выполняется по свойству вольтерровой δ-цепочки $\mathcal{T}$ оператора B; условие (2.35) выполняется в силу (2.39) и выбора $M_1 = M_0$; условие (2.36) выполняется в силу (2.39), (2.40) и выбора $M_1 = M_0$. По лемме 2.4 решение $z_{v,H_{i-1}}$ продолжимо на $H_i = H_{i-1} \cup h$, причем продолженное решение z_{v,H_i} удовлетворяет неравенству

$$\left\|AQ_{\Pi \setminus H_{i-1}}[z_{v,H_i} - z_0]\right\|_{q,l,h} < M_0. \tag{2.45}$$

Покажем, что

$$\|A[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} < M_0. \tag{2.46}$$

В соответствии с методом индукции это и будет означать, что решение z_{v,H_1} продолжимо на все $\Pi = H_{\mathbf{k}}$ и выполняется (2.43). Имеем

$$\|A[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} \le \left\|AQ_{H_{i-1}}[z_{v,H_i} - z_0]\right\|_{q,l,H_i} + \|AQ_h[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i}\,. \tag{2.47}$$

Так как $B \in V(\mathcal{T})$, то $A \in V(\mathcal{T})$ и $AQ_h[x](t) = 0$, $t \in H_{i-1}$, $x \in L_p^m(H_i)$. Следовательно, для любого $x \in L_p^m(H_i)$ имеем $\|AQ_h[x]\|_{q,l,H_i} = \|AQ_h[x]\|_{q,l,h} = \left\|AQ_{\Pi\setminus H_{i-1}}[x]\right\|_{q,l,h}$. Беря теперь $x = z_{v,H_i} - z_0$, из (2.45) получаем для второго слагаемого правой части (2.47)

$$\|AQ_h[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} < M_0. \tag{2.48}$$

Для первого слагаемого правой части (2.47) имеем

$$\left\|AQ_{H_{i-1}}[z_{v,H_i} - z_0]\right\|_{q,l,H_i} \le \|A\| \cdot \|z_{v,H_i} - z_0\|_{p,m,H_{i-1}}. \tag{2.49}$$

Так как $z_{v,H_i}(t) = z_{v,H_{i-1}}(t)$, $t \in H_{i-1}$, то

$$\|z_{v,H_i} - z_0\|_{p,m,H_{i-1}} = \left\|z_{v,H_{i-1}} - z_0\right\|_{p,m,H_{i-1}}. \tag{2.50}$$

Оценка (2.1) леммы 2.1, взятая при $H = H_{i-1}$, $z = z_{v,H_{i-1}}$, дает вместе с (2.44), (2.39) и условиями 1), 2) теоремы 1.3

$$\|z_{v,H_i} - z_0\|_{p,m,H_{i-1}} \le \gamma(M_0) \cdot d. \tag{2.51}$$

Из (2.49)–(2.51) получаем

$$\left\|AQ_{H_{i-1}}[z_{v,H_i} - z_0]\right\|_{q,l,H_i} \le \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d. \tag{2.52}$$

Неравенства (2.47)–(2.49), (2.52) дают оценку

$$\|A[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} < M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d. \tag{2.53}$$

Применим еще раз лемму 2.1, взяв теперь $H = H_i$, $z = z_{v,H_i}$ и заменив число M_0 на число $(M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d)$, что можно сделать ввиду неравенства (2.53). Оценка (2.2) леммы 2.1 дает

$$\|A[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} < \gamma(M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d) \cdot r(v, v_0). \tag{2.54}$$

Неравенства (2.54), (2.41) вместе с условием 3) теоремы 1.3 и дают доказываемое неравенство (2.46).

С учетом (2.43) из оценок (2.1), (2.2) леммы 2.1, взятых при $H = \Pi$, $z = z_v$, получаем оценки (1.10), (1.11), в которых $C = \gamma(M_0)$. □

References

[1] В. И. Сумин, “Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами”, *Доклады Академии наук*, **305**:5 (1989), 1056–1059; англ. пер.:V. I. Sumin, “Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **39**:2 (1989), 374–378.

[2] В. И. Сумин, “Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **15**:1 (2010), 453–466. [V. I. Sumin, “Equiquasinilpotency: definitions, conditions, examples of application”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **15**:1 (2010), 453–466 (In Russian)].

[3] В. И. Сумин, “Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **30**:1 (1990), 3–21; англ. пер.:V. I. Sumin, “The Features of Gradient Methods for Distributed Optimal-Control Problems”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **30**:1 (1990), 1–15.

[4] В. И. Сумин, “О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач”, *Дифференциальные уравнения*, **26**:12 (1990), 2097–2109; англ. пер.:V. I. Sumin, “Sufficient conditions for stable existence of solutions to global problems in control theory”, *Differential Equations*, **26**:12 (1990), 1579–1590.

[5] В. И. Сумин, *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами*, Издательство ННГУ, Нижний Новгород, 1992. [V. I. Sumin, *Funktsional'nye Volterrovy Uravneniya v Teorii Optimal'nogo Upravleniya Raspredelennymi Sistemami*, Nizhny Novgorod State University Publ., Nizhny Novgorod, 1992 (In Russian)].

[6] В. И. Сумин, “Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения”, *Вестник Нижегородского университета. Серия Математика.*, 2003, № 1, 91–107. [V. I. Sumin, “The problem of sustainability of existence global solutions of controlled boundary value problems and Volterra functional equations”, *Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematics*, 2003, № 1, 91–107 (In Russian)].

[7] И. В. Лисаченко, В. И. Сумин, “Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:6 (2011), 858–870; англ. пер.:I. V. Lisachenko, V. I. Sumin, “Nonlinear Goursat-Darboux Control Problem: Conditions for the Preservation of Global Solvability”, *Differential Equations*, **47**:6 (2011), 863–876.

[8] В. И. Сумин, А. В. Чернов, “Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем”, *Динамика систем и процессы управления*, Труды Международной конференции, Международная конференция «Динамика систем и процессы управления», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 2014 г.), 2015, 293–300. [V. I. Sumin, A. V. Chernov, “Volterra functional-operator equations in the theory of optimization of distributed systems”, *Systems Dinamics and Control Processes (SDCP'2014)*, Proceedings International Conference, International Conference “Systems Dinamics and Control Processes”, dedicated to the 90th Anniversary of the birth of Acad. N.N. Krasovskiy (Ekaterinburg, 2014), 2015, 293–300 (In Russian)].

[9] V. Sumin, “Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems”, *IFAC PapersOnLine*, **51**:32 (2018), 759–764.

[10] А. В. Чернов, “О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **58**:12 (2018), 2095–2111; англ. пер.:A. V. Chernov, “Preservation of the solvability of a semilinear Global Electric Circuit Equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:12 (2018), 2018–2030.

[11] В. И. Сумин, “Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений”, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 262–278. [V. I. Sumin, “Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle”, *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki URO RAN*, **25**:1 (2019), 262–278 (In Russian)].

[12] В. И. Сумин, “Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах”, *Вестник Нижегородского университета. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление*, 1998, № 2(19), 138–151. [V. I. Sumin, “Controlled functional Volterra equations in Lebesgue space”, *Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 1998, № 2(19), 138–151 (In Russian)].

[13] В. И. Сумин, “Об управляемых функциональных вольтерровых уравнениях в лебеговых пространствах”, *Депонировано в ВИНИТИ*, 03.09.98, № 2742-В98, 92 с. [V. I. Sumin, “On Controlled Functional Volterra Equations in Lebesgue spaces”, *Deposited in VINITI*, 03.09.98, № 2742-B98 (In Russian), 92 pp.]

[14] G. C. Rota, G. Strang, “A note on the joint spectral radius”, *Indag. Math.*, **22** (1960), 379–381.

[15] V. S. Shulman, Y. V. Turovskii, “Joint Spectral Radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtynski”, *Journal of Functional Analysis*, **177**:2 (2000), 383–441.

[16] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970. [YU. L. Daletskiy , M. G. Kreyn, *Ustoychivost' Resheniy Differentsial'nykh Uravneniy v Banakhovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

Информация об авторе

Сумин Владимир Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор. Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; профессор. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: v_sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 03.05.2020 г.
Поступила после рецензирования 28.06.2020 г.
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Information about the author

Vladimir I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor. Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: v_sumin@mail.ru

Received 03.05.2020
Reviewed 28.06.2020
Accepted for press 19.11.2020